数理解析研究所講究録
11巻 1966年 1-21

ÉQUATION AU CONTINGENT ET SYSTÈME DE COMMANDE

M. HUKUHARA

I. Préliminaires.

1. L'espace distancié dont les éléments sont des compacts.

La distance entre deux points a et b dans R^n est désingée par $\mathrm{dist}(a,b)$. La distance de a à une partie E de R^n est définie par

$$\mathrm{dist}(a,E) = \inf \{ \mathrm{dist}(a,x);\ x \in E \}.$$

Le δ-voisinage de E est l'ensemble défini par

$$U_\delta(E) = \{ x \in R^n;\ \mathrm{dist}(x,E) < \delta \}.$$

Alors la distance entre deux compacts A et B dans R^n est définie par

$$\mathrm{Dist}(A,B) = \inf \{ \delta;\ A \subset U_\delta(B), B \subset U_\delta(A) \}.$$

On vérifie immédiatement les trois axiomes de l'espace distancié. On obtient ainsi un espace distancié dont les éléments sont des parties compactes de R^n. Nous le désignerons par $\mathcal{Q}$.

On démontre sans peine la

Proposition 1.1 Si une famille de compacts dans R^n est bornée, elle est un ensemble relativement compact dans $\mathcal{Q}$.

2. Continuité.

Considérons une suite d'ensembles $\{E_i\}$. L'ensemble limite inférieur $\liminf E_i$ et l'ensemble limite supérieur $\limsup E_i$ sont définis par

$$\liminf E_i = \{ x \in R^n;\ \lim \operatorname{dist}(x, E_i) = 0 \},$$

$$\limsup E_i = \{ x \in R^n;\ \underline{\lim} \operatorname{dist}(x, E_i) = 0 \}.$$

On voit immédiatement les propositions suivantes.

Proposition 2.1 On a

$$\liminf E_i = \liminf \overline{E}_i,$$

$$\limsup E_i = \limsup \overline{E}_i.$$

Proposition 2.2 Si $\{E_i\}$ est une suite monotone, on a

$$\liminf E_i = \limsup E_i = \bigcap \overline{E}_i \quad \text{ou} \quad \overline{\bigcup E_i}$$

suivant que la suite est décroissante ou croissante.

Proposition 2.3 Si une suite de compacts $\{C_i\}$ converge vers C dans $\mathcal{D}$, on a

$$\liminf C_i = \limsup C_i = C,$$

et réciproquement. Dans ce cas, nous dirons qu'une suite de compacts $\{C_i\}$ converge vers un compact C et écrirons

$$\lim C_i = C \quad \text{ou} \quad C_i \to C.$$

On peut évidemment étendre la notion de l'ensemble limite inférieur et l'ensemble limite supérieur au cas d'un ensemble dépendant d'un paramètre et on a les propositions analogues aux propositions énumérées ci-dessus.

Soit $C(t)$ une application d'un intervalle compact I dans $\mathcal{D}$. Si l'on a toujours

$$C(t) = \lim_{h \to 0} C(t+h)$$

pour $t \in I$, nous dirons que $C(t)$ est <u>continue</u> dans I.

<u>Proposition 2.4</u> Soient A et B deux compacts tels que

$$\mathrm{Dist}(A,B) = \rho < \sigma.$$

Alors

$$C(\lambda) = \{ (1-\lambda)x + \lambda y;\ x \in A,\ y \in B,\ \mathrm{dist}(x,y) \leq \sigma \}$$

est une fonction continue dans $[0,1]$ et on a $C(0) = A$, $C(1) = B$ et

$$C(\lambda) \subset U_{\sigma}(A) \cap U_{\sigma}(B)$$

pour $0 < \lambda < 1$.

3. Enveloppe convexe.

Le plus petit ensemble convexe qui contient un ensemble donné E est appelé <u>enveloppe convexe</u> de E. Nous le désignons par env E.

On a les propositions suivantes.

Proposition 3.1 env C est la réunion des simplexes dont les sommets appartiennent à C. Si C est compact, env C l'est aussi.

Proposition 3.2 Soit C un compact, et P un plan passant par des points de C et laissant C d'un de ses côtés. On a alors

$$P \cap \text{env } C = \text{env}(P \cap C).$$

Proposition 3.3 Soit K un compact convexe et P un plan passant par des points de C et laissant C d'un de ses côtés. On a alors

$$P \cap \text{extr } K = \text{extr}(P \cap K).$$

4. Extrémité et tendeur. Soit E un compact convexe. Un point a de E est dit point extrême si E ne contient aucun segment dont le milieu est a. L'ensemble des points extrêmes est appelé extrémité et sa fermeture tendeur. Nous les désignerons respectivement par extr E, tend E. Dans le cas d'un simplexe S, tend S coïncide avec extr E et se compose de ses sommets.

On démontre successivement les propositions suivantes.

Proposition 4.1 Si, S désignant un simplexe dans R^n, on a

$$a \in S, \quad \text{dist}(a, \text{tend } S) = d > 0,$$

S contient un segment de longueur 2d/n dont le milieu est a.

Proposition 4.2 Si un point a d'un compact convexe K n'appartient pas à extr K, il existe un simplexe S tel que

$$a \in S, \quad \text{extr } S \subset \text{extr } K.$$

Proposition 4.3. Si, K désignant un compact convexe dans R^n, un point a de K est distant de extr K plus de $d>0$, K contient un segment de longueur $2d/n$ dont le milieu est a.

Proposition 4.4 Si C est un compact, on a tend env $C \subset C$.

Proposition 4.5 Si K est un compact convexe, on a env tend $K = K$.

5. Semi-continuité.

Soit $C(t)$ une application d'un intervalle compact I dans $\mathcal{D}$. Si l'on a

$$C(\tau) \supset \limsup_{t \to \tau} C(t)$$

pour $\tau \in I$, elle est dite semi-continue supérieurement. Si l'on a

$$C(\tau) \subset \liminf_{t \to \tau} C(t)$$

pour $\tau \in I$, elle est dite semi-continue inférieurement.

Proposition 5.1 Si une suite de compacts convexes dans R^n: $\{K_i\}$ et la suite de leurs tendeurs $\{\text{tend } K_i\}$ convergent respectivement vers K et C, on a

$$\text{tend } K \subset C.$$

Cette proposition entraîne immédiatement la semi-continuité inférieure du tendeur d'un compact convexe qui dépend d'un paramètre d'une manière continue.

Proposition 5.2 Si une suite de compacts dans R^n: $\{C_i\}$ converge vers un compact C, la suite de leurs enveloppes convexes $\{\text{env } C_i\}$ converge vers l'enveloppe convexe du compact limite C.

Par suite, si un compact $C(t)$ dépend d'un paramètre d'une manière continue, tend env $C(t)$ dépend de t d'une manière semi-continue inférieurement.

6. Mesurabilité.

Soit $I \subset R^1$ un ensemble mesurable et $F(t)$ une application de I dans $\mathcal{D}_n$. Si l'ensemble

$$\{t;\ F(t) \subset C\}$$

est mesurable pour tout $C \in \mathcal{D}_n$, $F(t)$ est dite mesurable.

Proposition 6.1 Si $F(t)$ est mesurable dans I, l'ensemble

$$(1) \qquad \{t;\ F(t) \subset E\}$$

est mesurable pour tout E borélien.

Car de tels ensembles s'obtiennent, en appliquant une infinité dénombrable de fois les opérations $\cup$ et $\cap$ par le procédé transfini à des ensembles qui correspondent à des compacts dans R^n.

Remarque. On peut remplacer (1) par

(1)' $\{t;\ F(t) \cap E = 0\}$

ou par

(1)" $\{t;\ F(t) \cap E \neq 0\}$.

<u>Proposition 6.2</u> Une application semi-continue est mesurable.

En effect, si $F(t)$ est semi-continue inférieurement, l'ensemble

$$T(C) = \{t;\ F(t) \subset C\}$$

est fermé. Si $F(t)$ est semi-continue supérieurement, l'ensemble

$$T_\delta(C) = \{t;\ F(t) \subset U_\delta(C)\}$$

est ouvert et on a $T(C) = \bigcap_\delta T_\delta(C)$.

A. Plis [1] a démontré la

<u>Proposition 6.3</u> Pour que $F(t)$ soit mesurable dans I, il faut et il suffit qu'il existe, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, une partie de I telle que $F(t)$ soit continue dans J, la mesure de $I-J$ étant moindre que ε.

II. Equivalence du système de commande et de l'équation au contingent.

1. Système de commande.

Soit I un intervalle compact. $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_m$ désignant respectivement les espaces distanciés dont les éléments sont des compacts dans R^n et R^m. $C(t,x)$ est une application de $I \times R^n$ dans $\mathcal{D}_m$, $f(t,x,u)$ une application continue de

$$\{(t,x,u);\ t\in I,\ x\in R^n,\ u\in C(t,x)\}$$

dans R^n, et $F(t,x)$ l'image de $C(t,x)$ par l'application f, c'est-à-dire

$$F(t,x) = \{f(t,x,u);\ u\in C(t,x)\}.$$

Nous supposons $C(t,x)$ semi-continue supérieurement. <u>Système de commande</u> est le système de conditions suivantes:

$$(1)\qquad \begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),u(t)) & \text{presque partout dans } I, \\ x(t): & \text{absolument continue dans } I, \\ u(t)\in C(t,x(t)): & \text{mesurable dans } I. \end{cases}$$

$u(t)$, $x(t)$, $C(t,x)$ et $F(t,x)$ sont appelés respectivement <u>fonction de commande, caractéristique, domaine de commande</u> et <u>contredomaine de commande</u>.

Si $x(t)$ est une caractéristique, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} x'(t)\in F(t,x(t)) & \text{presque partout dans } I, \\ x(t): & \text{absolument continue dans } I. \end{cases}$$

Pour voir l'implication $(2)\Rightarrow(1)$, on démontre la

<u>Proposition 1.1</u> Si $f(t,x(t),v(t))$ est mesurable dans I et $v(t)\in C(t,x(t))$ pour $t\in I$, il existe une fonction mesurable

$u(t)$ telle que l'on ait

$$f(t,x(t),u(t)) = f(t,x(t),v(t))$$

presque partout dans I.

$E(t)$ désignant une application de I dans $\mathcal{D}_m$, on définit successivement les ensembles $E_i(t)$ comme il suit:

$$u_1(t) = \inf \{ \text{première coordonnée de } u \in E(t) \},$$

$$E_1(t) = \{ u \in E(t); \text{ première coordonnée de } u = u_1(t) \},$$

$$u_2(t) = \inf \{ \text{deuxième coordonnée de } u \in E_2(t) \},$$

$$E_2(t) = \{ u \in E_1(t): \text{ deuxième coordonnée de } u = u_2(t) \},$$

et ainsi de suite. Le point $u(t)$ dont les coordonnées sont $u_1(t),\ldots, u_m(t)$ est appelé <u>minimum lexicographique</u>. On voit que si $E(t)$ est mesurable dans I, le minimum lexicographique l'est aussi.

Cela posé, l'ensemble $E(t)$ défini par

$$E(t) = \{ u; \; f(t,x(t),u) = f(t,x(t),v(t)) \}$$

est une application de I dans $\mathcal{D}_m$ semi-continue supérieurement. Pour obtenir la conclusion de la proposition 1.1, il suffit de prendre pour $u(t)$ le minimum lexicographique de $E(t)$.

Si $x(t)$ satisfait au système de conditions (2), il existe une fonction mesurable $v(t)$ telle que l'on ait

$$x'(t) = f(t,x(t),v(t)) \quad \text{presque partout dans } I,$$
$$v(t) \in C(t,x(t)) \quad \text{partout dans } I.$$

Grâce à la proposition 1.1 on peut définir une fonction $u(t)$ de manière que l'on ait (1). Par conséquent, Proposition 1.2 Les deux systèmes de conditions (1) et (2) sont équivalents.

2. Equation au contingent.

$x(t)$ étant une application de I dans R^n, sa dérivée contingentielle à l'instant τ est l'ensemble des vecteurs, chacun desquels est la limite d'une suite devecteurs

$$\frac{x(t_i)-x(\tau)}{t_i-\tau}$$

pour une certaine suite $\{t_i\}$ convergeant vers τ. L'inclusion

$$D^*x(t) \subset F(t,x(t)) \tag{3}$$

est l'équation au contingent associée au système de commande (1).

La semi-continuite superieure de $C(t,x)$ et la continuite de $f(t,x,u)$ entraînent la semi-continuité supérieure de $F(t,x)$. On en conclut l'existence d'un ensemble borné qui contient $F(t,x(t))$ pour $t \in I$ quelconque. L'inclusion (3) entraîne alors la continuité absolue de $x(t)$. On a donc la

Proposition 2.1 Une solution de l'inclusion (3) est une caractéristique.

Si l'on suppose la convexité de $F(t,x)$, la réciproque est aussi vraie, c'est-à-dire

Proposition 2.2 Si le contredomaine de commande est convexe, une caractéristique satisfait à l'inclusion (3).

3. Caractéristique périphérique et fonction de commande périphérique.

Supposons que chaque caractéristique existe dans l'intervalle $I = [0,1]$. Le graphique d'une caractéristique est appelé indifféremment caractéristique. L'ensemble engendré par les caractéristiques issues d'un point $A = (0,a)$ est appelé <u>zone d'émission</u> de A. Nous le désignons par $Z(A)$. La frontière de l'ensemble $Z(A)$ considéré comme partie de l'espace $I \times R^n$ est appelée <u>frontière latérale</u> de la zone d'émission. Nous la désignons par $\text{lat } Z(A)$. Si, $x(t)$ désignant une caractéristique, $(t,x(t))$ appartient à la frontière latérale $\text{lat } Z(A)$ pour $t \in [0,\tau]$, $x(t)$ est dite <u>périphérique</u> dans $[0,\tau]$. Si $u(t)$ appartient à la frontière de $C(t,x(t))$ presque partout dans $[0,\tau]$, la fonction de commande $u(t)$ est dite périphérique dans $[0,\tau]$.

Il est connu que si l'on suppose la convexité du contredomaine, chaque point $(\tau,\xi) \in \text{lat } Z(A)$ peut être joint à A par une caractéristique périphérique dans $[0,\tau]$.

On a de plus la

<u>Proposition 3.1</u> Si la correspondance entre $C(t,x)$ et $F(t,x)$ est un homéomorphisme pour chaque (t,x), à une caractéristique périphérique correspond une fonction de commande périphérique.

Si, en particulier, la correspondance entre $C(t,x)$ et $F(t,x)$ est biunivoque et linéaire, la convexité du premier implique celle du second. Il existe donc une caractéristique périphérique qui correspond à une fonction de commande périphérique.

III. Trajectoires et quasi-trajectoires.

1. Trajectoires et quasi-trajectoires.

Un ensemble quelconque composé de vecteurs sans R^n est appelé orienteur. Si à chaque point (t,x) de $I \times R^n$ correspond un orienteur $F(t,x)$, cet orienteur considéré comme fonction de (t,x) est appelé champ orientoriel. A un champ orientoriel $F(t,x)$ correspond une équation au contingent:

$$(1) \qquad D^*x(t) \subset F(t,x(t)).$$

Sa solution est appelée trajectoire contingentielle du champ $F(t,x)$.

Une fonction absolument continue $x(t)$ satisfaisant à l'équation

$$(2) \qquad x'(t) \in F(t,x(t))$$

est appelée trajectoire (ordinaire). Une fonction $x(t)$ est appelée quasi-trajectoire si elle est la limite d'une suite de fonctions absolument continues $x_i(t)$ satisfaisant au système de conditions:

$$(3) \qquad \begin{cases} x_i(0) = x(0), \quad x_i(t) \longrightarrow x(t) & \text{partout dans } I, \\ \exists M: |x_i'(t)| \leqq M & \text{presque partout dans } I, \\ \mathrm{dist}(x_i'(t), F(t,x_i(t))) \longrightarrow 0 & \text{presque partout dans } I. \end{cases}$$

2. Conditions $t(F)$, $o(F)$, $q(F)$.

Nous dirons que $x(t)$ satisfait à la condition $t(F)$, $o(F)$ ou $q(F)$ suivant que $x(t)$ est une trajectoire contingentielle, une trajectoire ordinaire ou une quasi-trajectoire.

Nous supposons la compacité de $F(t,x)$. Nous désignons par

$E(t,x)$ l'enveloppe convexe de $F(t,x)$ et par $Q(t,x)$ le tendeur de $E(t,x)$. La compacité de F implique celle de E et de Q.

Puisqu'on a

$$Q(t,x) \subset F(t,x) \subset E(t,x),$$

on a les implications

$$q(Q) \Rightarrow q(F) \Rightarrow q(E).$$

On a déjà remarqué l'équivalence $t(F) \Leftrightarrow o(F)$.

3. Implication $q(E) \Rightarrow o(E)$.

Si $x(t)$ est une fonction satisfaisant à la condition $q(E)$, il existe une suite de fonctions absolument continues $\{x_i(t)\}$ satisfaisant au système de conditions (3). Nous supposerons la semi-continuité supérieure de $F(t,x)$, ce qui entraîne celle de $E(t,x)$. On a par suite

$$E(t,x_i(t)) \subset E_\delta(t,x(t))$$

pour i assez grand, où

$$E_\delta(t,x) = U_\delta(E(t,x)).$$

La mesure $\operatorname{mes} T_i$ de l'ensemble

$$T_i = \{ t \in I;\ x_i'(t) \in E_\delta(t,x(t)) \}$$

converge vers 0. Le minimum lexicographique de l'ensemble $E(t,x(t))$ est une fonction mesurable $g(t)$.

Posons

$$u_i(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } t \in T_i, \\ x_i'(t) & \text{presque partout dans } I - T_i. \end{cases}$$

En intégrant $u_i(t)$, on obtient une fonction $y_i(t)$ satisfaisant à la condition $o(E_\delta)$, et la suite de fonctions $\{y_i(t)\}$ converge vers $x(t)$. δ étant un nombre positif, $x(t)$ satisfait à la condition $o(E)$. –

4. Un lemme.

Soit $S(t)$ un simplexe défine pour $t \in I$ et borné dans I, I désignant un ensemble de mesure finie dans R^1. Supposons que I soit la réunion des ensembles mesurables I_i disjoints l'un de l'autre et que $S(t)$ et $u(t) \in S(t)$ soient des constantes dans chacun des ensembles I_i.

Il existe alors $w(t)$ mesurable dans I, telle que l'on ait

$$w(t) \in \text{tend}\, S(t) \qquad \text{pour} \quad t \in I$$

et

$$\int_I u(t)dt = \int_I w(t)dt.$$

En effet, on a $u(t) = c_i$ pour $t \in I_i$. Soient $m_{i1}, m_{i2}, \ldots$, les coordonnées barycentriques de c_i relatives à S_i dont nous désignons par $b_{i1}, b_{i2}, \ldots$ les sommets. Décomposons I_i en la réunion des ensembles $I_{i1}, I_{i2}, \ldots$ de manière que l'on ait

$$\text{mes}\, I_{ij} = m_{ij}\, \text{mes}\, I_i.$$

Il suffit alors de poser $w(t) = m_{ij}$ pour $t \in I_{ij}$.

5. Implication $o(E) \Rightarrow q(Q)$.

Nous supposons la continuité du champ orientoriel $F(t,x)$. Soit $x(t)$ une trajectoire ordinaire du champ orientoriel $E(t,x)$. $Q(t,x(t))$ est alors semi-continue inférieurement. I peut donc être décomposé en la réunion d'un ensemble de mesure nulle et des ensembles compacts disjoints I_i, $i = 1,2,\ldots$, tels que

$$x'(t) \in E(t,x(t)), \quad |x'(t)-x'(s)| \leqq \delta,$$

$$\mathrm{Dist}(Q(t,t,x(t)),Q(s,x(s))) \leqq \delta$$

pour $t \in I_i$, $s \in I_i$, δ étant un nombre positif donné d'avance.

Prenons une valeur $t_i \in I_i$, et posons

$$u(t) = x'(t_i), \quad \tilde{Q}(t) = Q(t_i,x(t_i)) \quad \text{pour} \quad t \in I_i.$$

$x'(t_i)$ appartenant à env $f(t_i,x(t_i))$, il existe un simplexe S_i tel que

$$x'(t_i) \in S_i, \quad \text{tend } S_i \subset Q(t_i,x(t)).$$

Si i'on pose $S(t) = S_i$ pour $t \in I_i$, on a $u(t) \in S(t)$ presque partout dans I.

Décomposons I en des intervalles partiels de longueur au plus égale à δ: $J_1, J_2, \ldots$ D'après le lemme établi au n° 4, il existe une fonction $w(t)$ telle que l'on ait

$$w(t) \in \text{tend } S(t) \quad \text{presque partout dans} \quad I,$$

$$\int_{J_k} u(t)dt = \int_{J_k} w(t)dt, \qquad k = 1,2,\ldots$$

Posons

$$y(t) = \int_0^t w(t)dt.$$

On a alors

$$\dot{y}'(t) = w(t) \in Q(t) \quad \text{presque partout dans} \quad I,$$

et puis

$$|y(t)-x(t)| \leqq M\delta + \delta \,\mathrm{mes}\, I, \quad \mathrm{dist}(y'(t),Q(t,x(t))) \leqq \delta$$

presque partout dans I, M étant une certaine constante.

Les résultats obtenus jusqu'ici impliquent les équivalences

$$t(E) \Longleftrightarrow o(E) \Longleftrightarrow q(Q) \Longleftrightarrow q(F) \Longleftrightarrow q(E).$$

IV. Trajectoires du type tendoriel.

1. Equivalences $o(f,C) \Leftrightarrow o(F)$, $q(f,C) \Leftrightarrow q(F)$.

Si $x(t)$ est une solution du système de commande

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),u(t)) & \text{presque partout dans } I, \\ x(t) : & \text{absolument continue dans } I, \\ u(t) \in C(t,x(t)) & \text{mesurable dans } I, \end{cases}$$

nous dirons que $x(t)$ satisfait à la condition $o(f,C)$.

Nous dirons qu'une fonction absolument continue $x(t)$ satisfait à la condition $q(f,C)$ s'il existe deux suites de fonctions $\{x_i(t)\}$ et $\{u_i(t)\}$ satisfaisant au système de conditions:

$$(2) \quad \begin{cases} x_i(t) : \text{absolument continue dans } I, \\ u_i(t) : \text{mesurable dans } I, \\ x_i(0) = x(0), \quad x_i(t) \to x(t) \quad \text{partout dans } I, \\ u_i(t) \in C(t,x_i(t)) \quad \text{partout dans } I, \\ x_i'(t) - f(t,x_i(t),u_i(t)) \to o \quad \text{presque partout dans } I. \end{cases}$$

Nous supposons $C(t,x)$ continue dans $I \times R^n$. Le contredomaine de commande, que nous désginons par $F(t,x)$ est aussi une fonction continue dans $I \times R^n$.

On a alors la proposition

<u>Proposition 1.1</u> On a les équivalences

$$o(f,C) \Leftrightarrow o(F), \quad q(f,C) \Leftrightarrow q(F).$$

Les implications $o(f,C) \Rightarrow o(F)$, $q(f,C) \Rightarrow q(F)$ sont évidentes.

Pour démontrer l'implication $o(F) \Rightarrow o(f,C)$, il suffit de prendre le minimum lexicographique $u(t)$ de l'ensemble

$$E(t) = \{ u \in C(t,x(t)) ;\ f(t,x(t),u) \in F(t,x(t)) \},$$

$x(t)$ désignant une trajectoire ordinaire. L'implication $q(F) \Rightarrow q(f,C)$ est une conséquence immédiate du

<u>Lemme</u>. Supposons $x(t)$ continue dans I et $y(t)$ mesurable et bornée presque partout dans I. Il existe alors une fonction $u(t)$ mesurable dans I et telle que l'on ait

$$u(t) \in C(t,x(t)) \quad \text{presque partout dans } I,$$
$$\operatorname{dist}(y(t),f(t,x(t),u(t))) = \operatorname{dist}(y(t),F(t,x(t))) \quad \text{presque partout dans } I.$$

L'ensemble

$$D(t) = \{ w \in C(t,x(t)) ;\ \operatorname{dist}(y(t),f(t,x(t),w)) = \operatorname{dist}(y(t),F(t,x(t))) \}$$

représente un compact non vide pour $t \in J$, J désignant une partie de I telle que $\operatorname{mes} I = \operatorname{mes} J$. Il est mesurable dans I et le minimum lexicographique $u(t)$ de $D(t)$ répond à la question.

2. Une condition équivalente à $q(f,C)$.

On dit qu'une fonction continue $x(t)$ satisfait à la condition $q^*(f,C)$ s'il existe une suite de fonctions $\{v_i(t)\}$ telle que l'on ait

$$(3) \quad \begin{cases} v_i(t) \in C(t,x(t)) & \text{presque partout dans } I, \\ v_i(t) : & \text{mesurable dans } I, \\ x(0) + \int_0^t f(t,x(t),v_i(t))dt \rightarrow x(t) & \text{dans } I. \end{cases}$$

La suite $\{v_i(t)\}$ est appelée <u>suite de commande asymptotique</u> correspondant à $x(t)$.

<u>Proposition 2.1</u> On a l'équivalence $q(f,C) \Leftrightarrow q^*(f,C)$.

Pour voir l'implication $q(f,C) \Rightarrow q^*(f,C)$, nous prenons une fonction $x(t)$ qui satisfait à la condition $q(f,C)$. Il existe donc deus suites $\{x_i(t)\}$, $\{u_i(t)\}$ satisfaisant au système de conditions (2).

Les ensembles compacts

$$A_i(t) = C(t,x_i(t)), \quad B_i(t) = C(t,x(t))$$

sont des fonctions continues dans I, et on a

$$u_i(t) \in A_i(t), \quad \mathrm{Dist}(A_i(t),B_i(t)) \to 0,$$

Il suffit donc de démontrer le

Lemme. Supposons que les ensembles compacts $A_i(t)$ et $B_i(t)$ soient des fonctions continues dans I et que l'on ait

$$u_i(t) \in A_i(t), \quad \mathrm{Dist}(A_i(t),B_i(t)) \to 0$$

presque partout dans I, $u_i(t)$ étant mesurable dans I. Il existe alors une suite de fonctions $\{v_i(t)\}$ mesurables dans I et

$$v_i(t) \in B_i(t), \quad \mathrm{dist}(u_i(t),v_i(t)) \to 0.$$

Ce lemme sera établi si l'on prend pour $v_i(t)$ le minimum lexicographique de l'ensemble

$$D_i(t) = \{ w \in B_i(t);\ \mathrm{dist}(u_i(t),w = \mathrm{dist}(u_i(t),B_i(t))\}.$$

Pour démontrer l'implication $q^*(f,C) \to q(f,C)$, prenons une fonction $x(t)$ qui satisfait à la condition $q^*(f,C)$. On a donc (3).

Posons

$$x_i(t) = x(0) + \int_0^t f(t,x(t),v_i(t))dt,$$

$$A_i(t) = C(t,x(t)), \quad B_i(t) = C(t,x_i(t)),$$

et appliquons le lemme, intervertissant les rôles de $u_i(t)$ et de $v_i(t)$. On obtient alors une suite de fonctions $\{u_i(t)\}$ et le système de conditions (2) sera rempli.

3. Noyau tendoriel. L'ensemble

$$\hat{C}(t,x) = \{u \in C(t,x);\ f(t,x,u) \in Q(t,x)\}$$

est appelé noyau tendoriel. Une fonction qui satisfait à la condition $o(f,\hat{C})$ est appelée trajectoire du type tendoriel (bang-bang) et $u(t)$ fonction de commande par la méthode tendorielle (bang-bang).

On voit sans peine la mesurabilité de $\hat{C}(t,x(t))$. On a ensuite la

Proposition 3.1 On a l'équivalence $q(f,\hat{C}) \Leftrightarrow q(Q)$.

Remarque. Il est inutile de supposer la continuité de $A_i(t)$ dans le lemme au n° 2. Il suffit de supposer la mesurabilite de $B_i(t)$ et la relation

par

$$\text{dist}(u_i(t), B_i(t)) \to 0 \quad \text{presque partout dans} \quad I,$$

sans aucune mention relative à $A_i(t)$.

Démonstration de la proposition 3.1.

Puisqu'on a $q(f,\hat{C}) \Rightarrow q(f,C) \Leftrightarrow q(Q)$, il suffit de vérifier l'implication $q(Q) \Rightarrow q(f,\hat{C})$.

Soit $x(t)$ une fonction satisfaisant à la condition $q(Q)$. Il existe donc une suite de fonctions absolument continues $\{x_i(t)\}$ satisfaisant au système de conditions:

$$\begin{cases} x_i(0) = x(0),\ x_i(t) \to x(t) & \text{partout dans } I, \\ \exists M:\ |x_i'(t)| \leq M & \text{presque partout dans } I, \\ \text{dist}(x_i'(t), F(t,x_i(t))) \to 0 & \text{presque partout dans } I. \end{cases}$$

D'après la remarque, il existe une fonction mesurable $p_i(t)$ telle que

$$p_i(t) \in Q(t, x_i(t)),$$
$$\mathrm{dist}(x_i'(t), p_i(t)) = \mathrm{dist}(x_i'(t), Q(t, x_i(t)) \to 0.$$

Alors il existe une fonction mesurable $v_i(t)$ telle que

$$p_i(t) = f(t, x_i(t), v_i(t)), \quad v_i(t) \in C(t, x_i(t))$$

et l'ensemble

$$B_i(t) = \{u : p_i(t) = f(t, x_i(t), u), \quad u \in C(t, x_i(t))\}$$

considéré comme fonction de t est mesurable dans I. On peut donc remplacer $v_i(t)$ par $u_i(t)$ mesurable satisfaisant à la relation

$$f(t, x_i(t), u_i(t)) = p_i(t).$$

Par suite les conditions (2), où l'on remplace C par $\hat{C}$, sont toutes satisfaites.

Bibliographie

A. Marchaud:

[1] Sur les champs de demi-cônes et équations différentielles du premier ordre.
Bull. Soc. Math. France, 62 (1934), 1-38.

[2] Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales.
Compositio Math., 3 (1936), 89-127.

A. Pliś:

[1] Remark on measurable set-valued functions.
Bull. Acad. Pol. Sci., 9 (1961), 857-859.

[2] Trajectories and quasitrajectories of an orientor field.
Bull. Acad. Pol. Sci., 11 (1963), 369-370.

T. Ważewski:

[1] Système de commande et équations au contingent.
Bull. Acad. Pol. Sci., 9 (1961), 151-155.

[2] Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables.
Bull. Acad. Pol. Sci., 9 (1961), 861-863.

[3] Sur une condition équivalente à l'équation au contingent.
Bull. Acad. Pol. Sci., 9 (1961), 865-867.

[4] Sur la semicontinuité inférieure du "tendeur" d'un ensemble compact, variant d'une facon continue.
Bull. Acad. Pol. Sci., 9 (1961), 869-872.

[5] Sur une généralisation de la notion des solutions d'une équation au contingent.

[6] Sur les systèmes de commande non linéaires dont le contre-domaine de commande n'est pas forcément convexe.
Bull. Acad. Pol. Sci., 10 (1962), 17-21.

[7] Sur quelques définitions équivalentes des quasitrajectoires des systèmes de commande.
Bull. Acad. Pol. Sci., 10 (1962), 469-474.

[8] Equations au contingent et systèmes de commande.
Abstracts of short communications IMU, Stockholm, (1962), 205.

[9] On an optimal control problem, in connection with the theory of orientor fields of A. Marchaud and S. K. Zaremba.
Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962: EQUADIFF, Prague, (1963), 229-242.

S. K. Zaremba:

[1] Sur les équations au paratingent.
Bull. Sci. Math., 60 (1936), 139-160.